Μάθημα 103

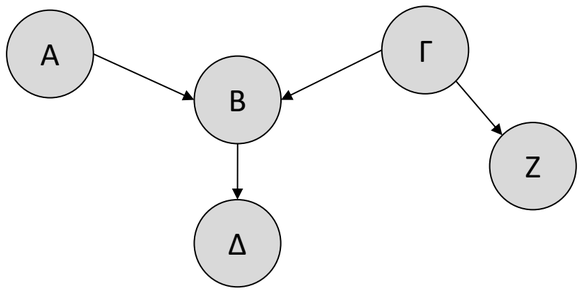
Δένδρα

Θεωρία – Παραδείγματα

Άσκηση 70 / σελίδα 181

Οι παρακάτω δομές είναι δένδρα ή όχι και γιατί;

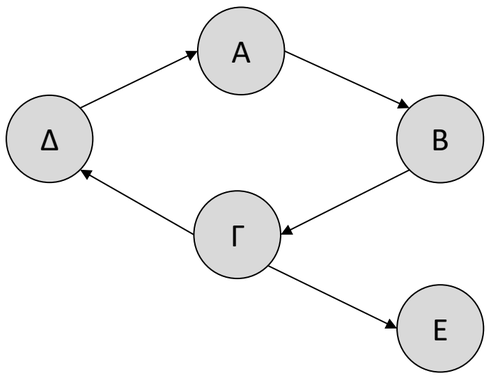
α.



ΟΧΙ

Έχει 2 ρίζες (Α, Γ)

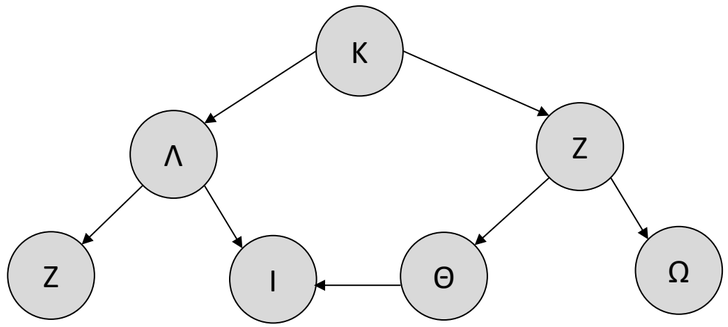
β.



ΟΧΙ

Δεν έχει ρίζα

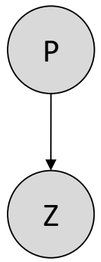
γ.



ΟΧΙ

Από τη ρίζα Κ στον κόμβο Ι, δύο διαδρομές

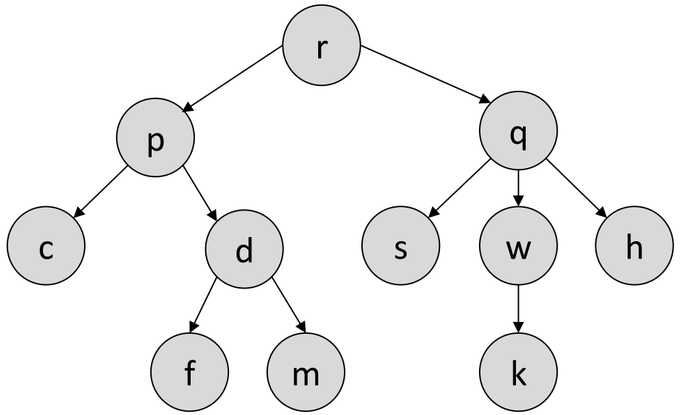
δ.



ΝΑΙ

Άσκηση 71 / σελίδα 182

Μελετώντας το διπλανό δένδρο να απαντήσετε στις ερωτήσεις:



α. Ποιος είναι ο γονέας του κόμβου q; **r**

β. Ποιος είναι ο γονέας του κόμβου h; **q**

γ. Ποιος είναι ο γονέας του κόμβου r; **κανείς**

δ. Ποια είναι τα παιδιά του κόμβου k; **κανένα**

ε. Ποια είναι τα παιδιά του κόμβου d; **f, m**

στ. Ποια είναι τα παιδιά του κόμβου q; **s, w, h**

ζ. Ποια είναι τα φύλλα; **c, f, m, s, k, h**

η. Ποια είναι τα αδέλφια του κόμβου w; **s, h**

θ. Ποια είναι τα υποδένδρα του κόμβου p; **c και f ← d → m**

ι. Ποια είναι η διαδρομή από τη ρίζα στον κόμβο h. **r → q → h**

ια. Ποια είναι τα υποδένδρα του κόμβου q; **s, w → k και h**

ιβ. Είναι το δένδρο δυαδικό; **Όχι (ο κόμβος q έχει 3 παιδιά)**

ιγ. Είναι το δένδρο διατεταγμένο; **Όχι (για παράδειγμα στα αδέλφια s, w, h δεν υπάρχει διάταξη)**

Άσκηση 74 / σελίδα 183

Ποια είναι η μορφή του διατεταγμένου δυαδικού δένδρου που ικανοποιεί την παρακάτω περιγραφή σχέσεων των κόμβων του;

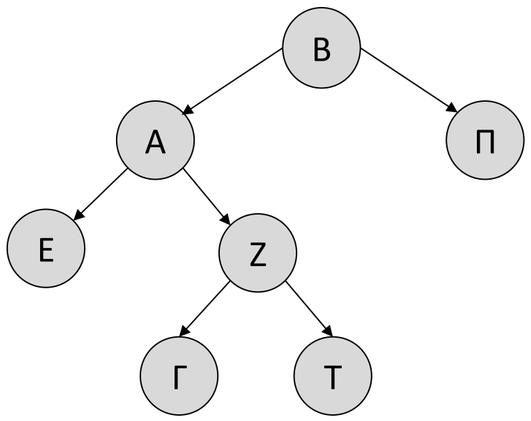
α. Ο κόμβος Ε έχει γονέα τον κόμβο Α.

β. Ο κόμβος Ζ έχει γονέα τον κόμβο Α.

γ. Ο κόμβος Α έχει γονέα τον κόμβο Β.

δ. Ο κόμβος Ζ έχει παιδιά τους κόμβους Γ και Τ.

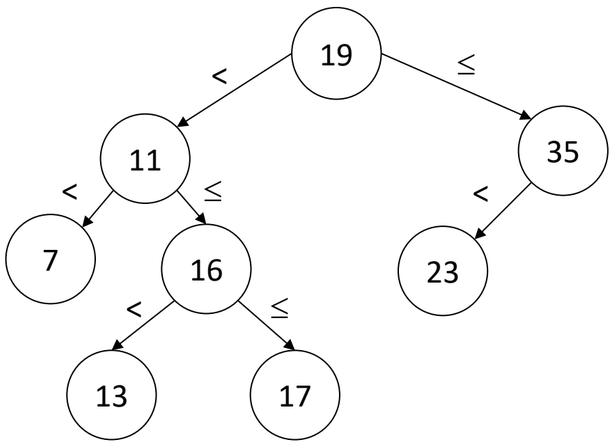
ε. Ο κόμβος Β έχει παιδί τον κόμβο Π.



Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Ορισμός

Τι είναι τα δυαδικά δένδρα αναζήτησης;

Ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης (binary search tree) είναι ένα δυαδικό δένδρο, όπου για κάθε κόμβο u, όλοι οι κόμβοι του αριστερού υποδένδρου έχουν τιμές μικρότερες της τιμής του κόμβου u και όλοι οι κόμβοι του δεξιού υποδένδρου έχουν τιμές μεγαλύτερες (ή ίσες) της τιμής του κόμβου u.

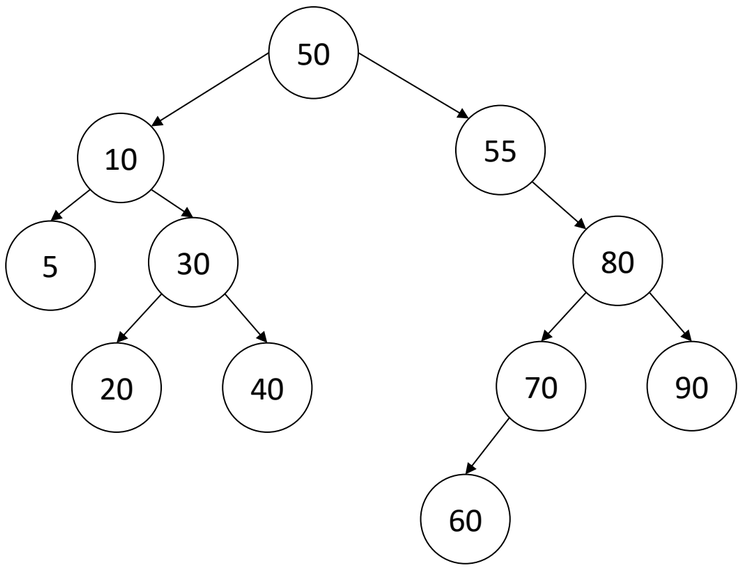


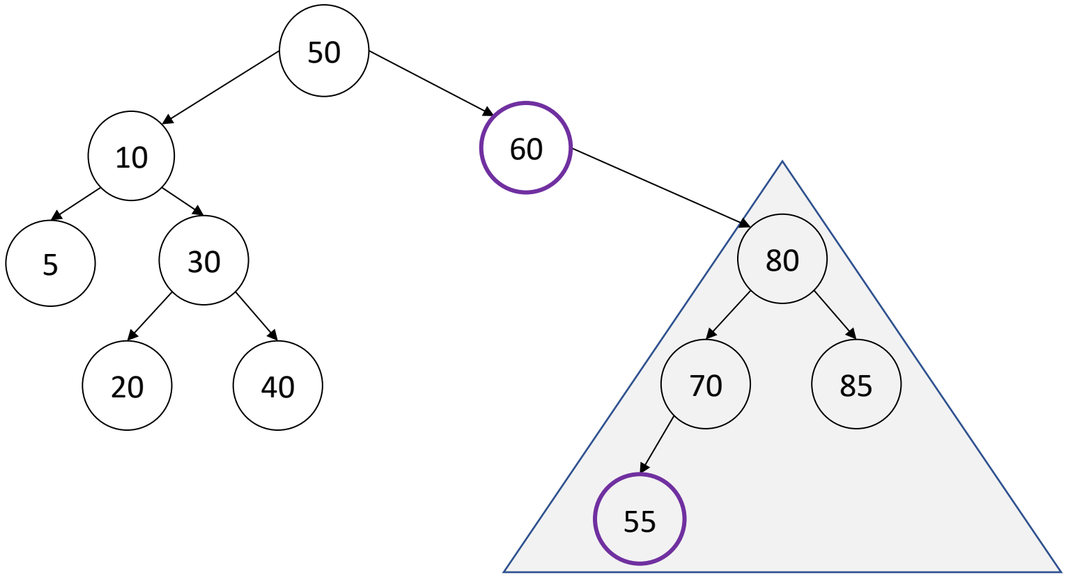
Για λόγους απλούστευσης, στο εξής θα θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν τιμές ίσες με την τιμή του κόμβου u.

Δηλαδή σε ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης (που είναι δομή δεδομένων) οι τιμές αποθηκεύονται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι αποτελεσματικότερη η αναζήτηση, αξιοποιώντας την τεχνική της δυαδικής αναζήτησης (που είναι αλγόριθμος).

Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Παράδειγμα 1

Ποιο από τα παρακάτω ΔΕΝ είναι δυαδικό δένδρο αναζήτησης και γιατί;

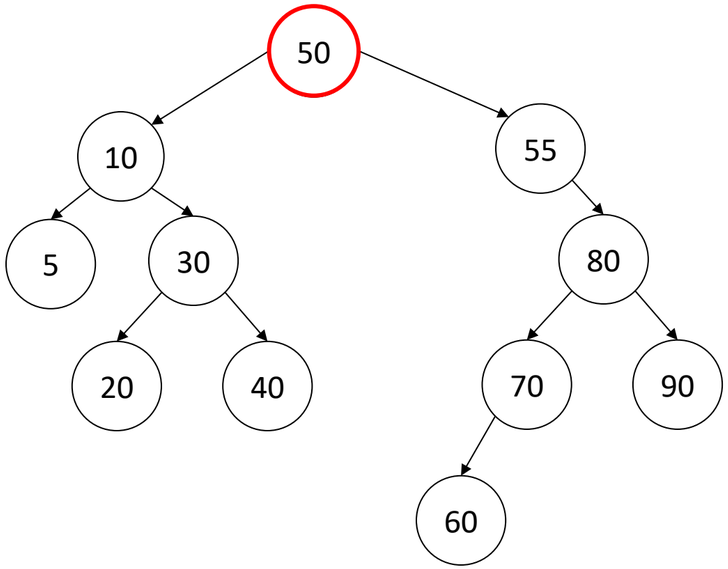




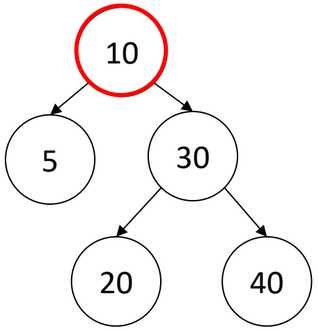
Δεν είναι το 2ο, καθώς ο κόμβος με τιμή 55, βρίσκεται στο δεξί υποδένδρο του κόμβου με τιμή 60, οπότε και θα έπρεπε να περιέχει τιμή μεγαλύτερη του 60.

Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Παράδειγμα 2

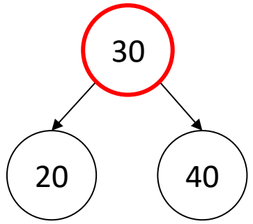
Ποια τα βήματα αναζήτησης του **20** στο διπλανό δένδρο αναζήτησης;



Βήμα 1ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (20) με τη ρίζα (50), και καθώς 20 < 50, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο αριστερό υποδένδρο της ρίζας, απορρίπτοντας το δεξί.



Βήμα 2ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (20) με τη ρίζα (10), και καθώς 20 > 10, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο δεξί υποδένδρο της ρίζας, απορρίπτοντας το αριστερό.

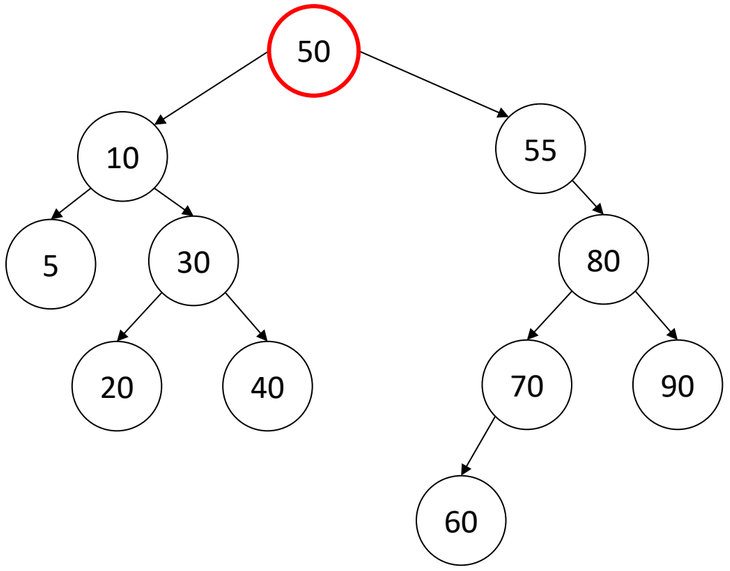


Βήμα 3ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (20) με τη ρίζα (30), και καθώς 20 < 30, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο αριστερό υποδένδρο της ρίζας, απορρίπτοντας το δεξί.

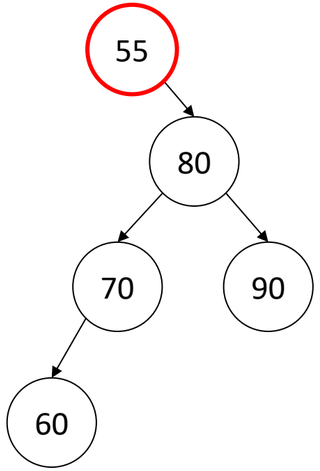
Βήμα 4ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (20) με τη ρίζα (20), και καθώς 20 = 20, ο κόμβος περιέχει το ζητούμενο.

Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Παράδειγμα 3

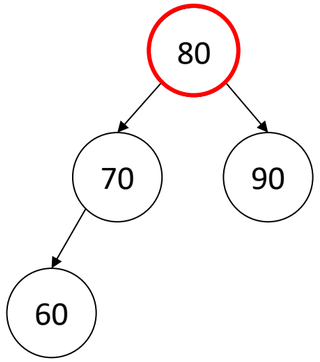
Ποια τα βήματα αναζήτησης του **75** στο διπλανό δένδρο αναζήτησης;



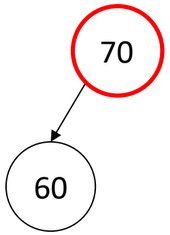
Βήμα 1ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (75) με τη ρίζα (50), και καθώς 75 > 50, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο δεξί υποδένδρο της ρίζας, απορρίπτοντας το αριστερό.



Βήμα 2ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (75) με τη ρίζα (55), και καθώς 75 > 55, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο δεξί υποδένδρο της ρίζας, απορρίπτοντας το αριστερό.



Βήμα 3ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (75) με τη ρίζα (80), και καθώς 75 < 80, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο αριστερό υποδένδρο της ρίζας, απορρίπτοντας το δεξί.

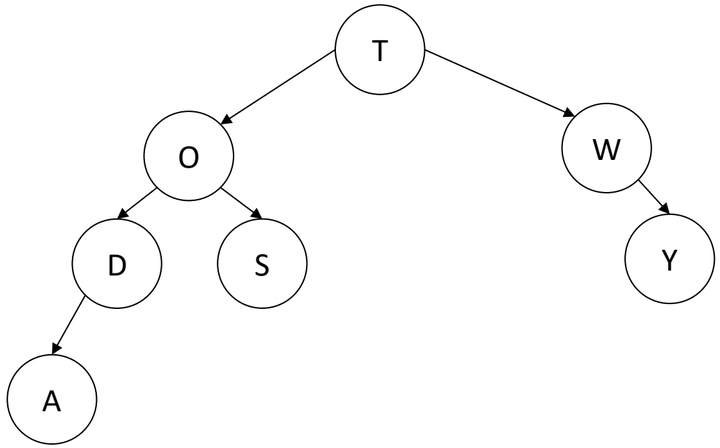


Βήμα 4ο
Συγκρίνουμε το ζητούμενο (75) με τη ρίζα (70), και καθώς 75 > 70, συνεχίζουμε την αναζήτηση στο δεξί υποδένδρο της ρίζας, που είναι το κενό.
Οπότε δεν υπάρχει.

Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Παράδειγμα 4

Να κατασκευάσετε το δυαδικό δένδρο αναζήτησης, στο οποίο εισάγονται διαδοχικά οι τιμές:

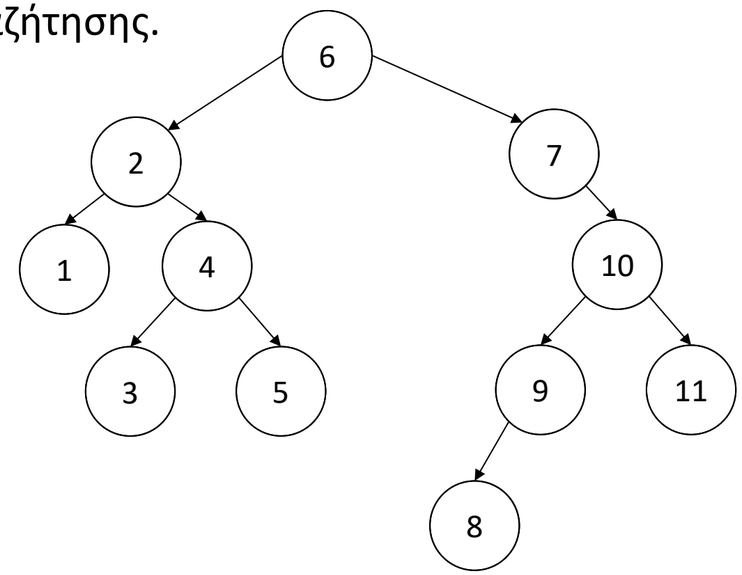
T, W, O, S, D, A, Y.



- Το "T" ως πρώτο μπαίνει στη ρίζα.
- Το "W" είναι μεγαλύτερο του "T" και μπαίνει δεξιά του.
- Το "O" είναι μικρότερο του "T" και μπαίνει αριστερά του.
- Το "S" είναι μικρότερο του "T" και μπαίνει αριστερά του, είναι μεγαλύτερο του "O" και μπαίνει δεξιά του.
- Το "D" είναι μικρότερο του "T" και μπαίνει αριστερά του, είναι μικρότερο του "O" και μπαίνει αριστερά του.
- Το "A" είναι μικρότερο του "T" και μπαίνει αριστερά του, είναι μικρότερο του "O" και μπαίνει αριστερά του, είναι μικρότερο του "D"και μπαίνει αριστερά του.
- Το "Y" είναι μεγαλύτερο του "T" και μπαίνει δεξιά του, είναι μεγαλύτερο του "W" και μπαίνει δεξιά του.

Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Παράδειγμα 5

Στους κόμβους του παρακάτω δένδρου να τοποθετηθούν οι ακέραιοι αριθμοί 1, 2, 3, … , 11, στις θέσεις που πρέπει, ώστε να καταστεί δυαδικό δένδρο αναζήτησης.

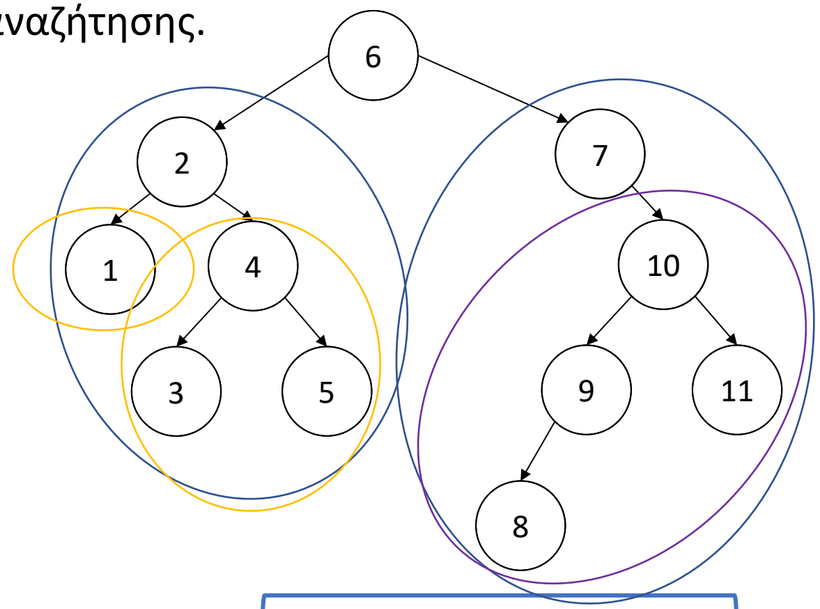


Τοποθετούμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

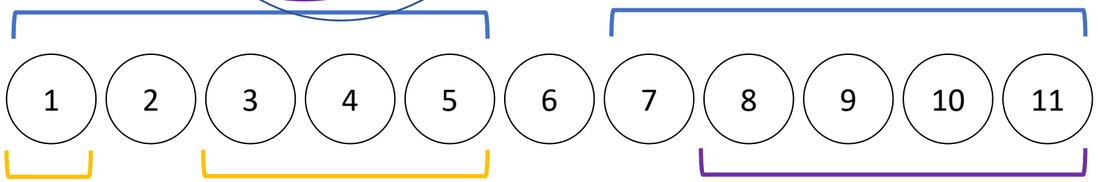
Ξεκινάμε από κάποιο κόμβο (αρχικά από τη ρίζα) και πηγαίνουμε αριστερά μέχρι να φτάσουμε σε φύλλο, όπου και τοποθετούμε τη μικρότερη τιμή. Έπειτα ανεβαίνουμε στο γονέα αυτού του κόμβου και τοποθετούμε την επόμενη τιμή. Μετά θεωρούμε ως αρχικό κόμβο αυτόν που βρίσκεται δεξιά του και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.
Εάν δεν υπάρχει κόμβος στα αριστερά, η τιμή μπαίνει στον τρέχοντα κόμβο.
Εάν δεν υπάρχει κόμβος στα δεξιά, ανεβαίνουμε μέχρι να βρούμε πρόγονο που δεν έχει λάβει ακόμη τιμή, του δίνουμε την επόμενη τιμή και πάμε προς τα δεξιά επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω.

Δυαδικό δένδρο αναζήτησης / Παράδειγμα 6

Στους κόμβους του παρακάτω δένδρου να τοποθετηθούν οι ακέραιοι αριθμοί 1, 2, 3, … , 11, στις θέσεις που πρέπει, ώστε να καταστεί δυαδικό δένδρο αναζήτησης.



Τοποθετούμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά:



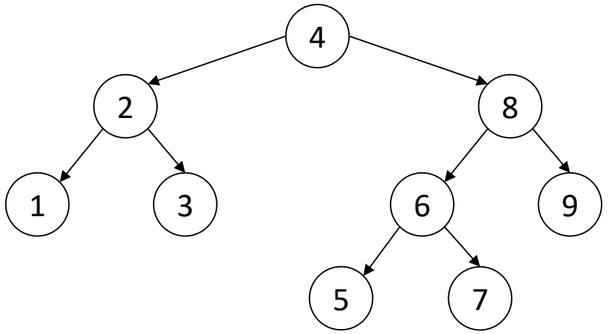
Η ρίζα έχει αριστερά της 5 κόμβους, δηλαδή τις 5 μικρότερες τιμές. Οπότε η ρίζα περιέχει την 6η στη σειρά τιμή.
Οι υπόλοιπες τιμές χωρίζονται σε δύο ομάδες, που αντιστοιχούν στα δύο υποδένδρα της ρίζας.
Συνεχίζουμε με αντίστοιχο τρόπο σε κάθε ένα από τα δύο υποδένδρα της ρίζας. Για παράδειγμα:
Στο αριστερό υποδένδρο, η ρίζα έχει αριστερά της 1 κόμβο, δηλαδή την 1η στη σειρά τιμή της αριστερής ομάδας, άρα η ρίζα του υποδένδρου θα έχει τη 2η τιμή.
Στο δεξί υποδένδρο, η ρίζα δεν έχει κόμβο αριστερά της, οπότε αυτή έχει τη μικρότερη τιμή της δεξιάς ομάδας.
Και ούτω καθεξής.

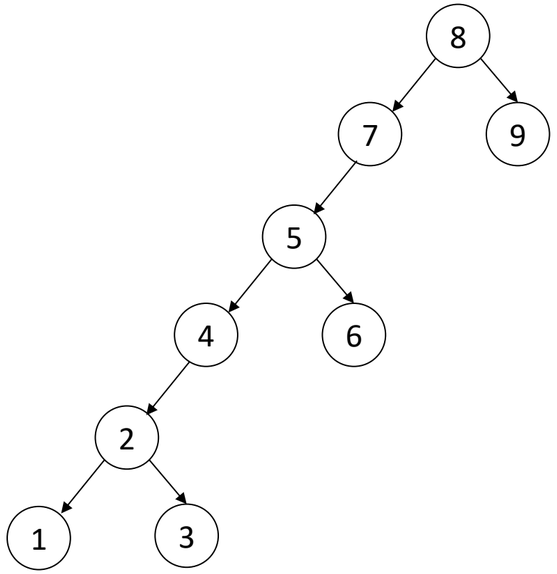
Δυαδικά δένδρα αναζήτησης / Ισορροπημένο δένδρο

Πότε ένα δυαδικό δένδρο αναζήτησης θεωρείται πιο ισορροπημένο;

Όταν σε κάθε βήμα της αναζήτησης, μετά από μη επιτυχημένη προσπάθεια, απορρίπτονται όσο περισσότεροι κόμβοι είναι δυνατόν.

Για παράδειγμα, τα δένδρα που ακολουθούν είναι δυαδικά δένδρα αναζήτησης και περιέχουν τα ίδια στοιχεία:





Έστω πως αναζητούμε το στοιχείο **2**.

Μετά την 1η προσπάθεια, που και στα δύο δένδρα θα είναι αποτυχημένη, στο αριστερό δένδρο θα απορριφθούν 6 κόμβοι, ενώ στο δεξί, μόνο 2.

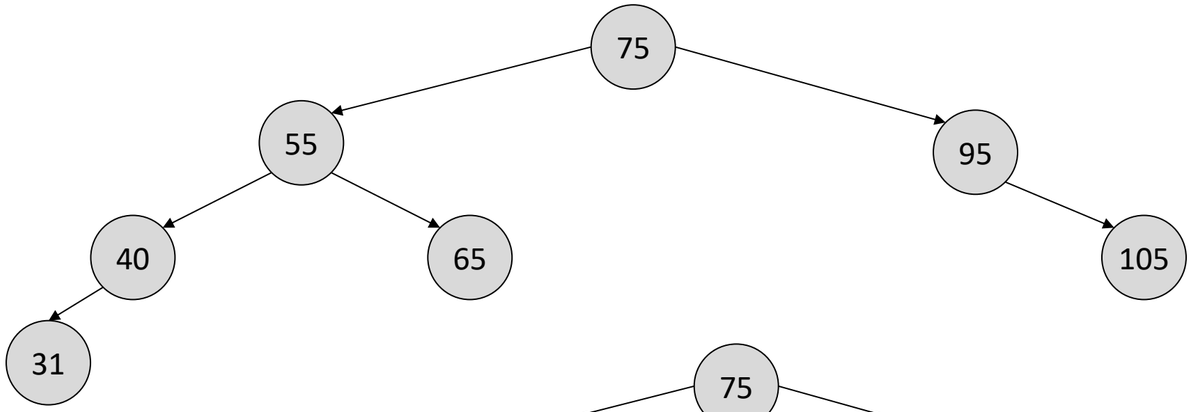
Θεωρούμε το αριστερό δένδρο, πιο ισορροπημένο από το δεξί.

Μία πιο απλή θεώρηση είναι ότι, μεταξύ δύο δένδρων δυαδικής αναζήτησης με τα ίδια στοιχεία, πιο "ανισόρροπο" είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο το ύψος (βάθος).

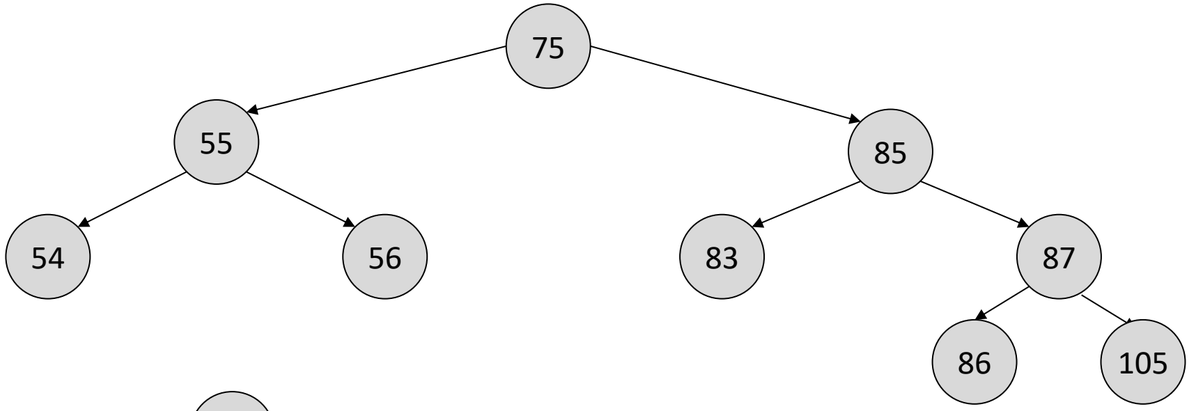
Άσκηση 76 / σελίδα 183

Ποιο είναι το δυαδικό δένδρο αναζήτησης που θα προκύψει κάθε φορά μετά την είσοδο των αριθμών που ακολουθούν σε κενό δένδρο;

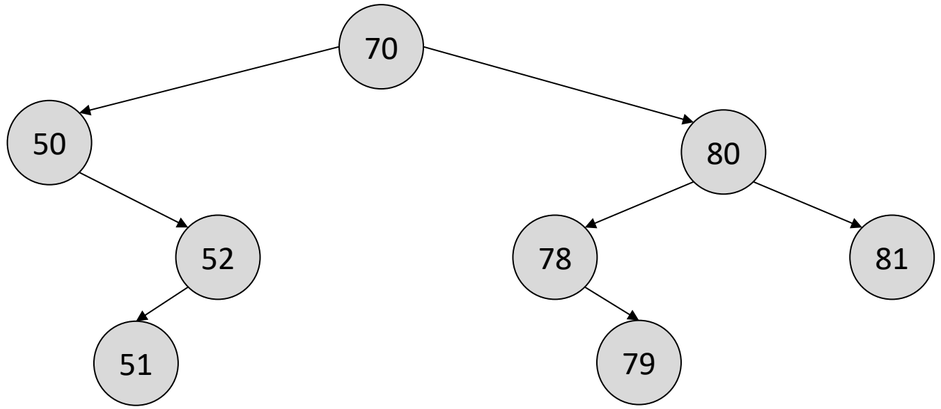
α. 75 55 95 40 65 31 105



β. 75 55 85 56 83 87 86 105 54



γ. 70 50 80 52 51 78 79 81



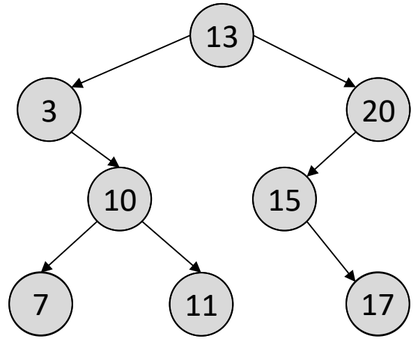
Άσκηση 81 / σελίδα 184

α. Μπορείτε να προτείνετε μια σειρά αριθμών, ώστε αν αυτοί εισαχθούν σε κενό δυαδικό δένδρο αναζήτησης, αυτό να λάβει τελικά τη μορφή του διπλανού σχήματος;

Επιλέγουμε 8 τιμές και τις τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά. Π.χ.

3 7 10 11 13 15 17 20

Ακολουθούμε τα βήματα της τεχνικής αριστερά – κέντρο – δεξιά.

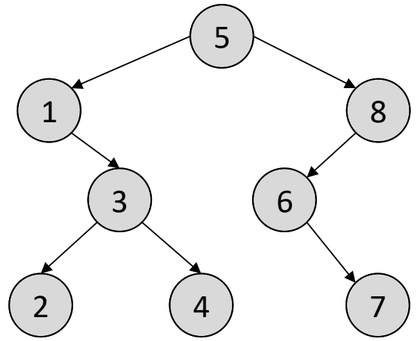


β. Πως θα τοποθετούσατε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ώστε το διπλανό δένδρο να είναι δυαδικό δένδρο αναζήτησης;

Οι τιμές είναι ήδη τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά.

1 2 3 4 5 6 7 8

Ακολουθούμε τα βήματα της τεχνικής διαίρει και βασίλευε.



Ενότητα 4

<u>Ασκήσεις</u>

66, 67 / σελίδα 180

72, 73 / σελίδα 182

75, 77, 78 / σελίδα 183

79, 80 / σελίδα 184